Документ с сайта http://ukhalov.com
e-mail: alex@ukhalov.com
Статья опубликована в сборнике

Преподавание математики и компьютерных наук в классическом университете: материалы 3-й научно-методической конференции преподавателей математического факультета и факультета информатики и вычислительной техники Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова / Отв. ред. М. В. Невский; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль, 2010. – 174 с.
ISBN 978-5-8397-0725-3

стр. 144–148.

УДК 517.38

Две формулы для вычисления площадей и объемов

А.Ю. Ухалов

В работе приводится вывод двух формул для вычисления площади области ограниченной ломаной линией и объема тела, ограниченного набором треугольников. Приведенные формулы удобны для численного решения геометрических задач, но не представлены в распространенных учебниках и задачниках.

Библиография: 1 название.

Используемые в университетах учебные пособия по математическому анализу и аналитической геометрии посвящены в первую очередь строгому изложению теоретического курса. В них часто невозможно найти формулы для решения тех или иных задач, пригодные, например, для программирования. Решение задач часто описывается на уровне общих указаний. Разумеется, учебник не должен заменять собой справочник по расчетным формулам, а студент, усвоивший курс, должен быть в состоянии самостоятельно вывести формулу, удобную для конкретного практического применения. Вместе с тем, представляется целесообразным несколько приблизить теоретические курсы к современным приложениям. Многие полезные для практики формулы студенты могут получать самостоятельно на практических занятиях.

Опыт автора показывает, что студенты легко выводят рассматриваемые в настоящей заметке формулы на практических занятиях по математическому анализу при изучении темы «кратные и криволинейные интегралы».

Представление кривых в виде набора простых элементов (отрезков, дуг окружностей и т.д.), а также представление поверхностей в виде триангуляций (набора треугольников) широко применяется в системах компьютерного моделирования. В связи с этим полезно знать формулы для вычисления площадей и объемов для кривых и тел, описанных таким образом.

Доказываемые ниже формулы удобны для программирования, но не представлены в распространенных учебниках и задачниках. Формула для вычисления площади широко известна, ее легко найти в интернете, выполнив запрос к поисковой системе по словам «площадь многоугольника» или «polygon area». Формула для объема известна меньше. На момент подготовки статьи автору не удалось найти ее в интернете в открытом доступе.

Теорема 1. *Пусть область на плоскости ограничена ломаной линией без самопересечений с вершинами в точках* (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n). *Тогда ориентированная площадь области может быть найдена по формуле*

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix}, \tag{1}$$

где $x_{n+1} = x_1$, $y_{n+1} = y_1$.

Под ориентированной площадью области понимается площадь области, взятая со знаком плюс, если вершины ломаной перечислены в порядке, соответствующем обходу области в положительном направлении (т.е. контур пробегается в направлении против часовой стрелки) и со знаком минус в противном случае.

Отметим, что ориентированную область можно вычислить для определения ориентации контура, т.е. когда требуется по набору вершин ломаной выяснить направление ее обхода.

Доказательство. Воспользуемся формулой для вычисления площади области с помощью криволинейного интеграла второго типа (см. например [1])

$$S = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx, \tag{2}$$

где C — данная ломаная. Пусть C_i — сегмент ломаной, соединяющий точки (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) $(i = 1, \ldots, n)$. В силу аддитивности интеграла, интеграл в правой части (2) равен сумме интегралов по сегментам C_i

$$\int_C = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i}$$

Интеграл по i-му сегменту легко вычислить, воспользовавшись параметризацией

$$x(t) = x_i + t(x_{i+1} - x_i), \quad y(t) = y_i + t(y_{i+1} - y_i), \quad t \in [0, 1].$$

Имеем

$$\int_{C_i} xdy - ydx = \int_0^1 [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt =$$

$$= \int_0^1 \begin{vmatrix} x_i + t(x_{i+1} - x_i) & (x_{i+1} - x_i) \\ y_i + t(y_{i+1} - y_i) & (y_{i+1} - y_i) \end{vmatrix} dt = \int_0^1 \begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix} dt = \begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix}.$$

Суммируя по i, находим интеграл $\int_C$ и, подставляя полученное значение в (2), приходим к формуле (1). Теорема доказана. $\square$

Формула (1) остается справедливой и для случая неодносвязной области – области, ограниченной одним внешним контуром и несколькими непересекающимися внутренними контурами. Требуется только, чтобы внутренние контуры, описывающие области, которые нужно «вынуть», пробегались в направлении, противоположном направлению обхода внешнего контура. Внутренние контуры также не должны иметь самопересечений.

В качестве задач для самостоятельного решения можно предложить студентам вывести аналогичные расчетные формулы для областей, ограниченных контурами, составленными не только из прямых отрезков, но и включающими другие элементы, например, дуги окружностей, эллипсов и т.п.

Справедливы аналоги формулы (1) для пространств с большим числом измерений. Мы ограничимся рассмотрением трехмерного случая.

Теорема 2. *Пусть тело в трехмерном пространстве ограничено поверхностью S, представляющей собой набор треугольников S_i с вершинами в точках (x_0^i, y_0^i, z_0^i), (x_1^i, y_1^i, z_1^i), (x_2^i, y_2^i, z_2^i) $i = 1, \ldots, n$, причем порядок перечисления точек треугольника задает ориентацию треугольника в пространстве по отношению к телу: если при обходе точек в порядке 0 – 1 – 2 – 0 треугольник остается слева, то мы «ходим» по внешней стороне границы тела. Предполагается также, что поверхность S не имеет самопересечений. Тогда объем тела может быть вычислен по формуле*

$$V = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} x_0^i & x_1^i & x_2^i \\ y_0^i & y_1^i & y_2^i \\ z_0^i & z_1^i & z_2^i \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Доказательство. Вывод формулы (3) аналогичен выводу формулы (1). Объем тела можно найти с помощью поверхностного интеграла второго типа по внешней стороне поверхности S, ограничивающей тело (см. например [1])

$$V = \frac{1}{3}\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy. \qquad (4)$$

Так как $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$, интеграл можно представить в виде суммы интегралов по всем треугольникам

$$\iint_S = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i}.$$

Для вычисления интеграла по i-му треугольнику воспользуемся параметризацией

$$\begin{aligned} x(u,v) &= x_0^i + u(x_1^i - x_0^i) + v(x_2^i - x_0^i), \\ y(u,v) &= y_0^i + u(y_1^i - y_0^i) + v(y_2^i - y_0^i), \\ z(u,v) &= z_0^i + u(z_1^i - z_0^i) + v(z_2^i - z_0^i), \end{aligned}$$

$(u,v) \in \Delta$, где Δ — треугольник на плоскости (u,v) с вершинами в точках $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,0)$. Сводя поверхностный интеграл к двойному, получим

$$J_i = \iint_{S_i} xdydz + ydzdx + zdxdy =$$

$$= \iint_\Delta \left[x(u,v)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + y(u,v)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + z(u,v)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right] dudv =$$

$$= \iint_\Delta \begin{vmatrix} x_0^i + u(x_1^i - x_0^i) + v(x_2^i - x_0^i) & (x_1^i - x_0^i) & (x_2^i - x_0^i) \\ y_0^i + u(y_1^i - y_0^i) + v(y_2^i - y_0^i) & (y_1^i - y_0^i) & (y_2^i - y_0^i) \\ z_0^i + u(z_1^i - z_0^i) + v(z_2^i - z_0^i) & (z_1^i - z_0^i) & (z_2^i - z_0^i) \end{vmatrix} dudv =$$

$$= \iint_\Delta \begin{vmatrix} x_0^i & x_1^i & x_2^i \\ y_0^i & y_1^i & y_2^i \\ z_0^i & z_1^i & z_2^i \end{vmatrix} dudv = \begin{vmatrix} x_0^i & x_1^i & x_2^i \\ y_0^i & y_1^i & y_2^i \\ z_0^i & z_1^i & z_2^i \end{vmatrix} \iint_\Delta dudv.$$

Интеграл по треугольнику Δ от единицы равен площади этого треугольника, т.е. $\frac{1}{2}$. Окончательно получаем

$$J_i = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0^i & x_1^i & x_2^i \\ y_0^i & y_1^i & y_2^i \\ z_0^i & z_1^i & z_2^i \end{vmatrix}.$$

Суммируя по i и подставляя полученное выражение для $\iint_S$ в формулу (4), приходим к формуле (3). Теорема доказана. $\square$

Формула (3) справедлива и для случая тела с пустотами, если треугольники, описывающие внутренние пустоты тела, ориентированы соответствующим образом.

На этом же пути могут быть получены формулы для вычисления объемов тел, ограниченных более сложными поверхностями.

Список литературы

[1] *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. М.: Наука, 1988.