Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Математический факультет
Кафедра математического анализа
http://www.uniyar.ac.ru
http://math.uniyar.ac.ru

Ухалов А. Ю.

Вопросы к экзамену по математическому анализу для студентов специальности Компьютерная безопасность

Семестр 1

1. Множество действительных чисел (аксиомы, inf, sup, теорема о точной нижней грани).

2. Предел числовой последовательности. Свойства сходящихся последовательностей (единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности, предел константы $\lim c = c$, переход к пределу в неравенстве, переход к пределу в двойном неравенстве).

3. Бесконечно малые (б. м.) последовательности. Свойства б. м. последовательностей (сумма двух б. м. — б. м., произведение б. м. на ограниченную — б. м., $(x_n \to a) \Leftrightarrow (x_n - a \to 0)$.

4. Арифметические операции со сходящимися последовательностями (предел суммы, произведения, отношения).

5. Бесконечно большие (б. б.) последовательности. Свойства б.б. последовательностей (неограниченность, 1/ б. м. = б. б.).

6. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса о сходимости монотонной и ограниченной последовательности.

7. Число e. Доказательство сходимости последовательности

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

8. Теорема Кантора о вложенных отрезках.

9. Подпоследовательности. Частичные пределы, верхний и нижний пределы последовательности (определения и свойства).

10. Теорема о пределе подпоследовательности сходящейся последовательности.

11. Теорема Больцано-Вейерштрасса (всякая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность).

12. Понятие фундаментальной последовательности. Теорема об ограниченности фундоментальной последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.

13. Понятие функции. Определения предела функции на языке $\delta - \varepsilon$ (по Коши) и через предел последовательности (по Гейне). Теорема об эквивалентности определений.

14. Критерий Коши существования предела функции.

15. Различные типы предела функции:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

где

$$a = c, \quad c+0, \quad c-0, \quad \infty, \quad +\infty, \quad -\infty,$$

$$A = B, \quad B+0, \quad B-0, \quad \infty, \quad +\infty, \quad -\infty.$$

Теорема об односторонних пределах.

16. Локальные свойства функции, имеющей предел (ограниченность, сохранение знака).

17. Свойства пределов функции связанные с неравенствами.

18. Теорема о существовании односторонних пределов монотонной функции.

19. Замена переменной при вычислении предела.

20. Неравенства для тригонометрических функций:

$$a) \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x \in (-\pi, \pi), \quad x \neq 0;$$

$$b) \quad |\sin x| \leq x \quad \forall x.$$

21. Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

22. Второй замечательный предел

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

23. Сравнение функций. -символика, эквивалентность. Теорема о вычислении пределов с помощью эквивалентных функций.

24. Понятие непрерывности функции. Непрерывность слева и справа. Классификация точек разрыва функции (разрывы 1го рода и 2го рода).

25. Свойства непрерывных функций (непрерывность функций $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$ и $f(x)/g(x)$). Непрерывность сложной функции.

26. Теорема Вейерштрасса об ограниченности функции непрерывной на отрезке.

27. Теорема Вейерштрасса о достижимости непрерывной на отрезке функцией точной верхней и нижней граней.

28. Теорема Коши о нулях непрерывной функции.

29. Теорема Коши о промежуточных значениях непрерывной функции.

30. Обратные функции. Теорема об обратной функции (существование, монотонность, непрерывность) функции монотонной и непрерывной на отрезке.

31. Производная функции. Геометрический смысл производной.

32. Производные элементарных функций C, x^n $(n \in \mathbf{N})$, $\sin x$, $\cos x$, a^x, $\log_a x$, x^α $(\alpha \in \mathbf{R})$.

33. Теорема о непрерывности функции имеющей производную.

34. Односторонние и бесконечные производные.

35. Производные суммы, произведения и частного.

36. Производная сложной функции.

37. Производные элементарных функций $\tan x$, $\cot x$, e^{-x}, $\sinh x$, $\cosh x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$.

38. Производная показательно-степенной функции $[u(x)]^{v(x)}$.

39. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала. Применение дифференциала для приближенных вычислений.

40. Производные высших порядков. Формула Лейбница.

41. Дифференциалы высших порядков. Инвариантность формы дифференциала первого порядка и отсутствие инвариантности формы для дифференциалов порядка выше первого.

42. Дифференцирование параметрически заданной функции (1я, 2я, 3я производные).

43. Понятие локального экстремума функции. Теорема Ферма.

44. Теорема Ролля о нулях производной.

45. Теорема Лагранжа (формула конечных приращений).

46. Следствия из теоремы Лагранжа

$$\begin{aligned} &a) \quad f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = Const; \\ &b) \quad f'(x) = k \Rightarrow f(x) = kx + b; \\ &c) \quad \varphi(x_0) = \psi(x_0),\ \varphi'(x) > \psi'(x) \Rightarrow \varphi(x) > \psi(x),\ x > x_0. \end{aligned}$$

47. Теорема Коши (обобщенная формула конечных приращений).

48. Многочлен Тейлора функции.

49. Вспомогательная лемма $\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{n+1}(\xi)}{\psi^{n+1}(\xi)}\right)$.

50. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

51. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

52. Единственность представления функции, имеющей в точке x_0 производную n-го порядка, в виде

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$$

53. Разложение по формуле Тейлора основных элементарных функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1 + x)^\alpha$, $\log(1 + x)$.

54. Правило Лопиталя. Вычисление предела

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

где $f(a) = 0$, $g(a) = 0$ при условии существования $f^{(n)}(a)$, $g^{(n)}(a)$ ($g^{(n)}(a) \neq 0$).

55. Правило Лопиталя. Вычисление предела

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

в случае неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

56. Правило Лопиталя. Вычисление предела

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

в случае неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

57. Правило Лопиталя. Вычисление предела

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

в случае неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$.

58. Критерий возрастания и убывания функции на интервале.

59. Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции.

60. Понятие строгого возрастания (убывания) функции в точке. Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции в точке.

61. Экстремумы функции (стационарные точки, критические точки, строгий экстремум, перемена знака). Первое достаточное условие строгого экстремума ($f'(x)$ меняет знак).

62. Второе и третье достаточные условия строгого экстремума (исследование на экстремум с помощью $f''(x),\ldots,f^{(n)}(x)$).

63. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

64. Выпуклость функции. Точки перегиба. Достаточное условие выпуклости.

65. Необходимое условие точки перегиба. Первое и второе достаточные условия точки перегиба (второе — без доказательства).

66. Асимптоты графика функции.

67. Примерная схема построения графика функции.

2 декабря 2010

Ухалов А. Ю., к. ф.-м. н., доцент кафедры
математического анализа ЯрГУ им П. Г. Демидова
http://www.ukhalov.com/matan
e-mail: alex@ukhalov.com